Министарство просвете и спорта Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

15.03.2008.

VIII РАЗРЕД

1. Колико има целих бројева x за које важи $\frac{1}{4} < \frac{2-x}{7} < \frac{11}{12}$?

2. Однос површина страна датог квадра је $2:3:5$. Израчунај однос дужина ивица тог квадра.

3. Одреди x ако је $x^2 + \sqrt{3} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$.

4. Краци трапеза припадају правама које су међусобно нормалне. Докажи да је збир квадрата дужина дијагонала тога трапеза једнак збиру квадрата дужина основица.

5. Дат је скуп $S = \{8,\ 5,\ 1,\ 13,\ 3,\ 21,\ 2\}$. Милена за сваки двочлани подскуп скупа S на табли записује већи број. Одреди збир бројева које је Милена написала на табли.

Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА – VIII РАЗРЕД

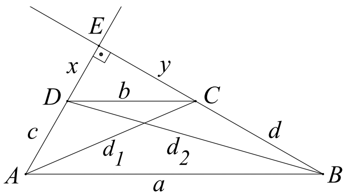
1. $\dfrac{1}{4} < \dfrac{2-x}{7} < \dfrac{11}{12}$; $\dfrac{21}{84} < \dfrac{12(2-x)}{84} < \dfrac{77}{84}$ (**5 бодова**)

$21 < 12(2-x) < 77$ (**5 бодова**). Како $x \in \mathbb{Z}$, то и $2-x \in \mathbb{Z}$, па је $2-x \in \{2,3,4,5,6\}$, тј. $x \in \{0,-1,-2,-3,-4\}$. Дакле, 5 целих бројева задовољава услове задатка (**10 бодова**).

2. Нека је $ab : bc : ca = 2 : 3 : 5$, тј. $\dfrac{ab}{2} = \dfrac{bc}{3} = \dfrac{ca}{5}$ (**5 бодова**). Сада је $\dfrac{a}{2} = \dfrac{c}{3}$ и $\dfrac{b}{3} = \dfrac{a}{5}$ (**5 бодова**), односно $\dfrac{a}{10} = \dfrac{c}{15}$ и $\dfrac{a}{10} = \dfrac{b}{6}$ (**5 бодова**). Коначно $\dfrac{a}{10} = \dfrac{b}{6} = \dfrac{c}{15}$, односно $a : b : c = 10 : 6 : 15$.

3. Полазна једначина се може записати у облику $x^2+\sqrt{3} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2}$ (**10 бодова**), тј. $x^2+\sqrt{3} = 1+\sqrt{3}$, одакле је $x^2 = 1$ (**5 бодова**), тј. $x = 1$ или $x = -1$ (**5 бодова**).

4.



Нека су дате ознаке као на слици. Тада је

$$a^2 = (c+x)^2 + (d+y)^2 \quad \text{и} \quad b^2 = x^2 + y^2, \quad \text{тј.}$$

$$a^2 + b^2 = (c+x)^2 + (d+y)^2 + x^2 + y^2 \text{ (\textbf{10 бодова})}.$$

Слично је и

$$d_1^2 = (c+x)^2 + y^2 \quad \text{и} \quad d_2^2 = x^2 + (d+y)^2, \quad \text{тј.}$$

$$d_1^2 + d_2^2 = (c+x)^2 + (d+y)^2 + x^2 + y^2 \text{ (\textbf{10 бодова})},$$

одакле долазимо до тврђења задатка.

5. Милена ће за подскупове $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,5\}$, $\ldots$ редом записивати на табли $2,\ 3,\ 5,\ \ldots$ (**5 бодова**). Како је $S = \{8,\ 5,\ 1,\ 13,\ 3,\ 21,\ 2\}$ сваки број ће се налазити на табли онолико пута колико има елемената пре њега (ако их посматрамо у растућем поретку), тј:

$1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 13 \cdot 5 + 21 \cdot 6 = 246$ (**15 бодова**).